Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória
aula 2

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Cap. 2 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

2.1. Otimização Combinatória - Introdução

2.2. Relaxações

- Relaxação
- Relaxação Linear
- Relaxação Lagrangeana – Método de Subgradiente

2.3. Resolução exacta de problemas

- Branch and Bound
- Planos de Corte

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \max_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}\{z(\mathbf{u})\}$

$z(u) \leq z$

$w_{DL} \leq z$

PLI $z = Min\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \leq \mathbf{d}, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}\boxed{(\mathbf{d} - \mathbf{Dx})} + \mathbf{y}\boxed{(\mathbf{t} - \mathbf{Tx})} : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = max\{z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \boxed{\mathbf{v} \leq \mathbf{0}}; \boxed{\mathbf{y}\ livre}\}$

≥ 0 $= 0$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

PLI $z = Max\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(u) = Max\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}\boxed{(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})} : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = \min_{\mathbf{u} \geq \mathbf{0}}\{z(\mathbf{u})\}$

≥ 0

$z(u) \geq z$

$w_{DL} \geq z$

PLI $z = Max\left\{\mathbf{cx} : \boxed{\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \geq \mathbf{d}, \mathbf{Tx} = \mathbf{t}}, \mathbf{x} \in X \subseteq \mathbf{Z}^n\right\}$

PLI (u) $z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) = Min\left\{\mathbf{cx} + \mathbf{u}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) + \mathbf{v}\boxed{(\mathbf{d} - \mathbf{Dx})} + \mathbf{y}(\mathbf{t} - \mathbf{Tx}) : \mathbf{x} \in X\right\}$

DL $w_{DL} = min\{z(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \boxed{\mathbf{v} \leq \mathbf{0}}; \mathbf{y}\ livre\}$

$\boxed{\leq 0}$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Relaxações

- Prova-se que o valor <u>ótimo</u> do Dual Lagrangeano nunca é pior que o da relaxação linear:

$$z_{RL} \leq w_{DL} \leq z^*$$

- Quando um problema goza da **propriedade de integralidade** o valor ótimo do Dual Lagrangeano coincide com o da sua relaxação Linear:

$$z_{RL} = w_{DL} \leq z^*$$

- Como obter "bons" multiplicadores de Lagrange?

$$\mathbf{u} = ?$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

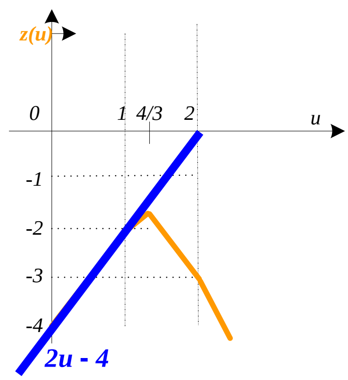
Exemplo

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!
- A Função Dual, $z(\mathbf{u})$, é:
  - Linear por troços e côncava
- Se, ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO única, $\tilde{\mathbf{x}}$
  - $\Longrightarrow$ $z(\tilde{\mathbf{u}})$ é diferenciável com gradiente $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$

Ex.: $z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \{x_1(1-\tilde{u}) + x_2(\tilde{u}-2)\}$ ⊕ ⊖

$\tilde{u} < 1$

gradiente:

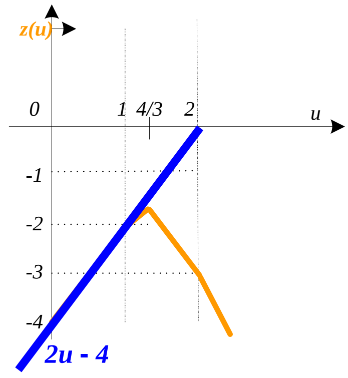


OTIMIZAÇÃO INTEIRA

ISEG LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

Exemplo

- Resolver o Dual Lagrangeano de um PLI – Problema Não Linear!
- A Função Dual, $z(\mathbf{u})$, é:
  - Linear por troços e côncava
- Se, ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO única, $\tilde{\mathbf{x}}$
  - $\Longrightarrow z(\tilde{\mathbf{u}})$ é diferenciável com gradiente $\mathbf{b} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$



Ex.: $z(\tilde{u}) = \underset{\mathbf{x} \in X}{\text{Min}} \{x_1(1-\tilde{u}) + x_2(\tilde{u}-2)\}$ $\oplus$ $\ominus$

$$\tilde{u} < 1 \Longrightarrow \tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$$

gradiente: $-x_1 + x_2 = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}$ em $\tilde{\mathbf{x}} = (0,2)$ declive de $z(\mathbf{u})$!

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

ISEG LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT UNIVERSIDADE DE LISBOA

Relaxações

- Se ao fixar $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$
  - $z(\tilde{\mathbf{u}})$ tiver SO alternativas
    - $\Longrightarrow z(\tilde{\mathbf{u}})$ não é diferenciável!
- Subgradiente de uma função côncava em $\tilde{\mathbf{u}}$

$$z(\tilde{\mathbf{u}}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{u}}) \geq z(\tilde{\mathbf{u}}) \text{ , } \forall \mathbf{v} \geq \mathbf{0}$$

- Coleção de Subgradientes em $\tilde{\mathbf{u}}$

$$Sub = \left\{ \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}})} \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}) : \sum_{\tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}})} \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} = 1, \lambda_{\tilde{\mathbf{x}}} \geq 0, \forall \tilde{\mathbf{x}} \in S(\tilde{\mathbf{u}}) \right\}$$

onde: $S(\tilde{\mathbf{u}}) = \{\tilde{\mathbf{x}} : \tilde{\mathbf{x}} \text{ é SO de } \mathbf{PLI}(\tilde{\mathbf{u}})\}$

e se: $\mathbf{0} \in Sub \Longrightarrow$?

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

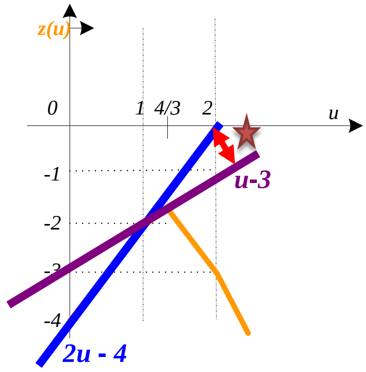
Exemplo

$\boxed{\tilde{u} = 1}$ $z(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\limits_{\mathbf{x}\in X}\{x_1\underbrace{(1-\tilde{u})}_{=0} + x_2\underbrace{(\tilde{u}-2)}_{<0}\}$

- Subgradientes:

  $S(\tilde{\mathbf{u}}) = \{\tilde{\mathbf{x}}^1 = (0{,}2);\;\; \tilde{\mathbf{x}}^2 = (1{,}2)\}$

  $\mathbf{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\mathbf{x}} = 0 - x_1 + x_2$



- Se $\lambda_1 = 0$ – gráfico...
- Se $\lambda_2 = 0$ – gráfico...

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

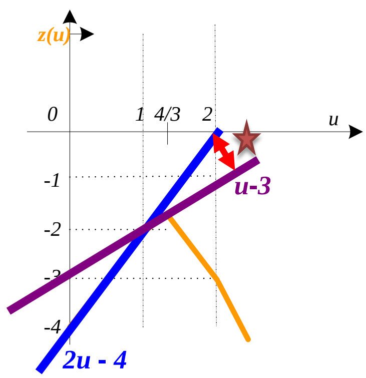
Exemplo

$\boxed{\tilde{u} = 1}$ $z(\tilde{\mathbf{u}}) = \min\limits_{\mathbf{x}\in X}\{x_1\underbrace{(1-\tilde{u})}_{=0} + x_2\underbrace{(\tilde{u}-2)}_{<0}\}$

- Subgradientes:

  $S(\tilde{\mathbf{u}}) = \{\tilde{\mathbf{x}}^1 = (0{,}2);\;\; \tilde{\mathbf{x}}^2 = (1{,}2)\}$

  $\mathbf{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\mathbf{x}} = 0 - x_1 + x_2$



- Se $\lambda_1 = 0$ – gráfico...
- Se $\lambda_2 = 0$ – gráfico...

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Método de Subgradiente

- Obtenção de "bons" multiplicadores: $w_{LD} = \max\{z(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\}$

0. Input: max_iter; $\mathbf{u}^0$; $k = 0$; ε ; μ_0 ; $\underline{z}$; $\overline{z}$ — μ passo (escalar)

1. Resolver $\mathrm{PLI}(\mathbf{u}^k)$ e seja $\mathbf{x}^k$ a respetiva SO

   Se $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k \leq \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}^k(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k) = \mathbf{0}$ FIM: $\mathbf{x}^k$ é s.o. do PLI e $z(\mathbf{u}^k) = w_{DL} = z^*$

2. Se $\underline{z} < z(\mathbf{u}^k) \Rightarrow \underline{z} \leftarrow z(\mathbf{u}^k)$

3. Obter o novo vetor de multiplicadores: $u^{k+1} = \text{máx}\{\mathbf{0}; \mathbf{u}^k + \mu_k \boxed{(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k)}\}$

4. $k \leftarrow k + 1$

5. Se ($k = \max\_iter$ ou $\frac{\overline{z} - \underline{z}}{\overline{z}} \leq \varepsilon$) FIM

   caso contrário, voltar a 1.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Método de Subgradiente

Observações:

- O valor do minorante só é atualizado quando se obtém um valor melhor que o atual (passo 2)!

- Escolha do passo (μ_k>0) – por forma a que haja convergência:

$$\mu_k = \lambda_k \frac{\overline{z} - z(\mathbf{u}^k)}{\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^k\|^2} \quad \text{com} \quad 0 < \lambda_k \leq 2$$

- Regra: iniciar com λ_k=2 e dividir ao meio sempre num nº pré-definido de iterações o valor do minorante não seja alterado!

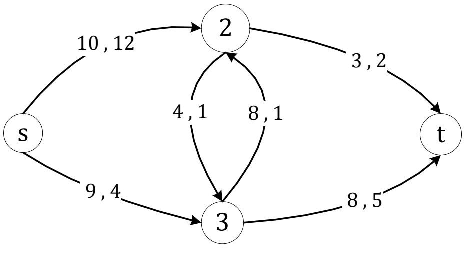
- Sempre que no passo 1 se obtém uma SA de valor menor que o do majorante este deve ser atualizado!

Exemplo

OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Exercícios

5. Escrever o Método de subgradiente considerando o problema inicial de Maximização em que se relaxam restrições de tipo $\leq$.
6. Aplicar o algoritmo subgradiente (4 iterações) aos problemas do exercício 2.
7. Considere a seguinte rede, onde os valores sobre os arcos representam, respetivamente, o custo e o tempo. Formule o problema de determinação do caminho de custo total mínimo de s para t, com tempo total não superior a $\beta = 10$ e defina uma sua relaxação Lagrangeana. Faça 2 iterações do método subgradiente.



Solver